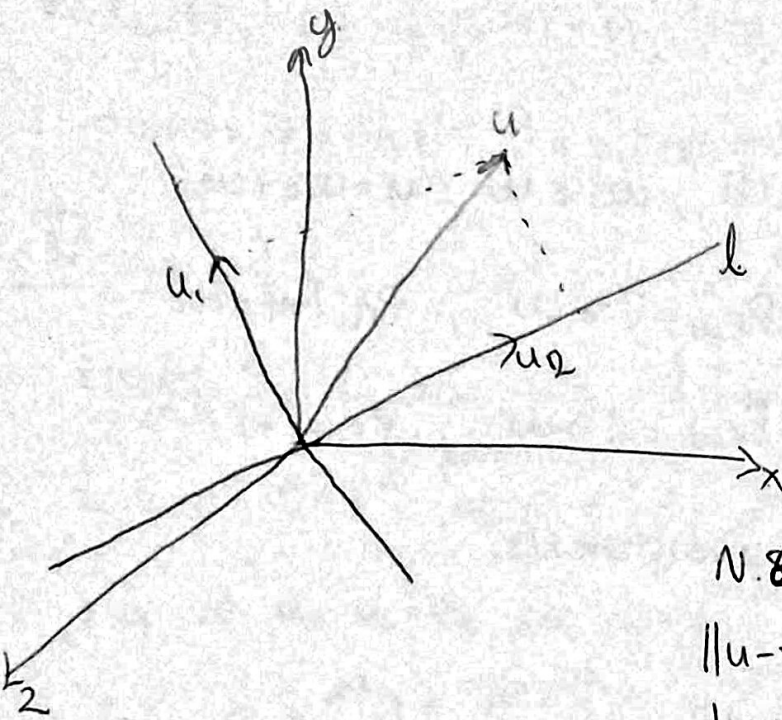




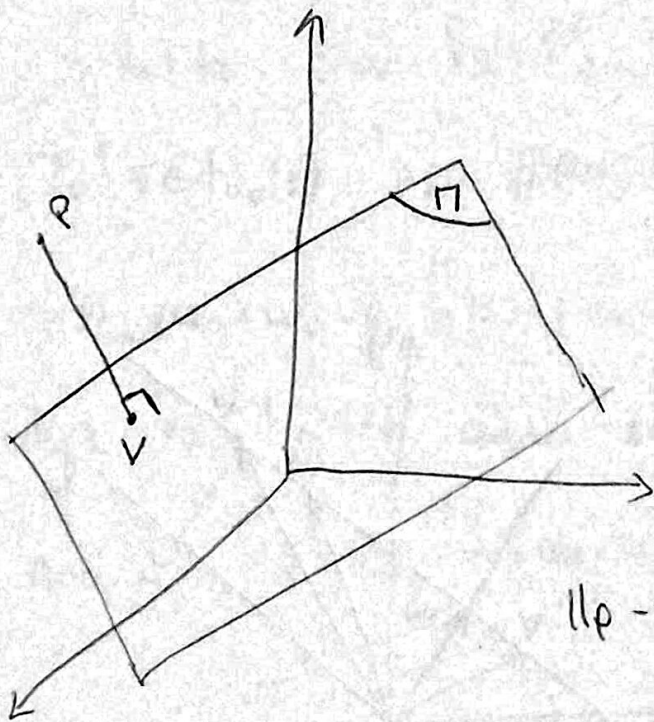
$$0 \in l$$

$$\text{dist}(u, l) = \|u_l\|$$

$$\text{dist}(u, l) = \inf \{ \|u - v\| : v \in l \}$$

Άσκηση

Ν.8. το v για το οποίο έχουμε:
 $\|u - v\| = \text{dist}(u, l)$ υπάρχει και είναι
 μοναδικό



$$0 \in \Pi$$

$$\text{dist}(P, \Pi) = \inf \{ \|P - v\| : v \in \Pi \}$$

Άσκηση

Το $v \in \Pi$ για το οποίο ισχύει:

$\|P - v\| = \text{dist}(P, \Pi)$ είναι μοναδικό

$$f(v) = \|P - v\| - \text{dist}(P, \Pi)$$

$$f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$f(v) = 0$ έχει μοναδική ρίζα

$$V \text{ δ.γ } V = W \oplus W'$$

$$W \leq V$$

$$W' \leq V$$

υπόχωρος του V

$\forall u \in V$ υπάρχουν μοναδικά $w_0 \in W, w'_0 \in W' : u = w_0 + w'_0$

Έτσι ορίζονται οι προβολές $Pr_W : V \rightarrow W, Pr_W(u) = w_0$

$Pr_{W'} : V \rightarrow W', Pr_{W'}(u) = w'_0$

Οι προβολές είναι γραμμικές συναρτήσεις.

~~ΠΡΟΤΑΣΗ~~

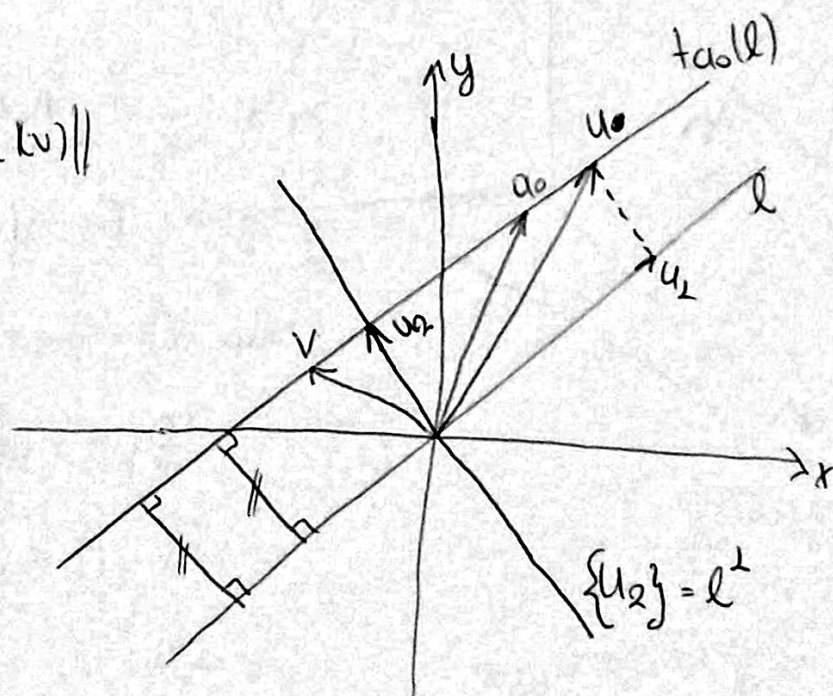
Να δείξει ότι $\forall u, v \in \text{τα}_0(l) \quad \text{dist}(u, l) = \text{dist}(v, l)$

Λύση

$$\text{dist}(u, l) = \|u_2\| = \|Pr_{l^\perp}(u)\| = \|u - Pr_l(u)\|$$

$$\text{αφού } u = Pr_l(u) + Pr_{l^\perp}(u)$$

$$\text{dist}(v, l) = \|Pr_{l^\perp}(v)\| = \|v - Pr_l(v)\|$$



(Η απόδειξη θα είναι παρόμοια με χρήση της παρακάτω πρότασης)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω l ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ και έστω $a_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus l$. Έστω τυχόν $v \in t_{a_0}(l)$. Τότε $\text{pr}_{l^\perp}(v) = \text{pr}_{l^\perp}(a_0)$ και

$$\text{dist}(a_0, l) = \text{dist}(v, l) = \|\text{pr}_{l^\perp}(a_0)\| = \|\text{pr}_{l^\perp}(v)\|$$

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι ισχύει $l \cap t_{a_0}(l) = \emptyset$. Το $0 \in l$ άρα $0 \notin t_{a_0}(l)$

Επίσης $0 \in l^\perp$ άρα $l^\perp \neq t_{a_0}(l)$ (2)

Για το $a_0 = a_1 + a_2$ με $a_1 \in l$, $a_2 \in l^\perp \Rightarrow a_2 = a_0 - a_1 \in t_{a_0}(l)$

Άρα $a_2 \in l^\perp \cap t_{a_0}(l)$ (1)

Έστω τυχόν $v \in t_{a_0}(l)$ τότε αν γράφεται και μοναδικό τρόπο:

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{όπου } v_2 \in l^\perp, v_1 \in l \Rightarrow v_2 = v - v_1 \quad \Rightarrow$$

Το $v \in t_{a_0}(l)$ άρα $\exists w_0 \in l$: $v = a_0 + w_0$

$$\Rightarrow v_2 = a_0 + w_0 - v_1 = a_0 + (w_0 - v_1) \in t_{a_0}(l)$$

Άρα $v_2 \in t_{a_0}(l)$ αλλά και $v_2 \in l^\perp \Rightarrow v_2 \in l^\perp \cap t_{a_0}(l)$ (3)

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow a_2 = v_2$ $\left(\begin{array}{l} \text{Αν } a_2 \neq v_2 \text{ από (1), (3)} \Rightarrow l^\perp = t_{a_0}(l) \\ \text{από (2)} \end{array} \right)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω l ευθεία του $\mathbb{R}^2$ και $a_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus l$ Τότε $\text{dist}(l, t_{a_0}(l)) = \text{dist}(a_0, l)$

Απόδειξη

Έστω $v_1, v_2 \in t_{a_0}(l)$

$$\text{dist}(l, t_{a_0}(l)) = \inf \{ \|u - v\| : u \in l, v \in t_{a_0}(l) \}$$

Έστω $v_0 \in t_{a_0}(l)$ $\text{dist}(v_0, l) = \inf \{ \|v_0 - u\| : u \in l \}$

Άρα $\text{dist}(l, t_{a_0}(l)) \leq \text{dist}(v_0, l) \quad \forall v_0 \in t_{a_0}(l)$

όμως $\text{dist}(v_0, l) = \| \text{pr}_{l^\perp}(a_0) \| = \| a_0 - \text{pr}_l(a_0) \|$
 $\quad \quad \quad \in t_{a_0}(l) \quad \in l$

$$\text{dist}(l, t_{a_0}(l)) \leq \| a_0 - \text{pr}_l(a_0) \|$$

$$\text{dist}(l, t_{a_0}(l)) \leq \text{dist}(v_0, l)$$

~~dist(l, t_{a_0}(l))~~ $\text{dist}(v_0, l) = \| a_0 - \text{pr}_l(a_0) \| \quad \forall v_0 \in t_{a_0}(l)$

$\forall v \in t_{a_0}(l), \forall u \in l : \|v - u\| \leq \|a_0 - \text{pr}_l(a_0)\|$

$$\|a_0 - \text{pr}_l(a_0)\| = \text{dist}(v_0, l) \leq \|v_0 - u\| \quad \forall u \in l$$

$\forall v_0 \in t_{a_0}(l)$

Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω l' μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά υπόχωρος)

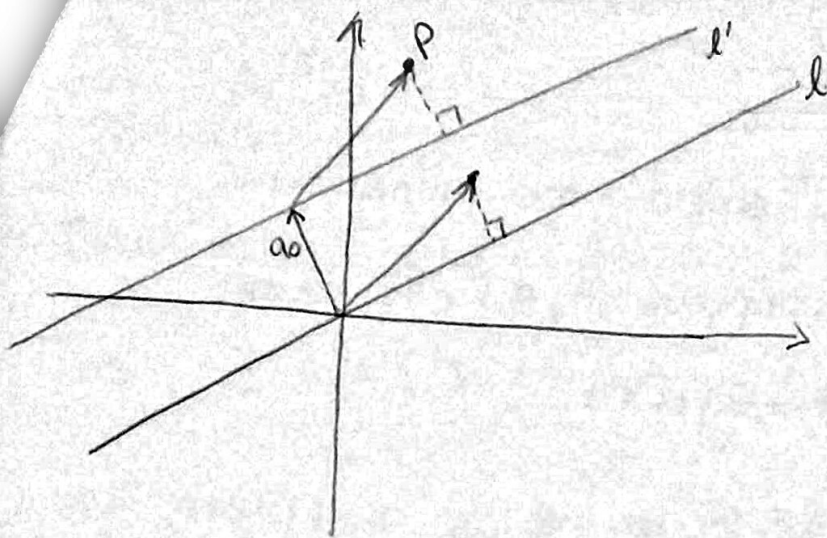
Έστω $u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus l'$. Θα προσδιορίσουμε την απόσταση:

$$\text{dist}(u_0, l') = \inf \{ \|v - u_0\| : v \in l' \} \quad \text{αλλά } l' = t_{a_0}(l) \text{ όπου } l \text{ ευθεία}$$

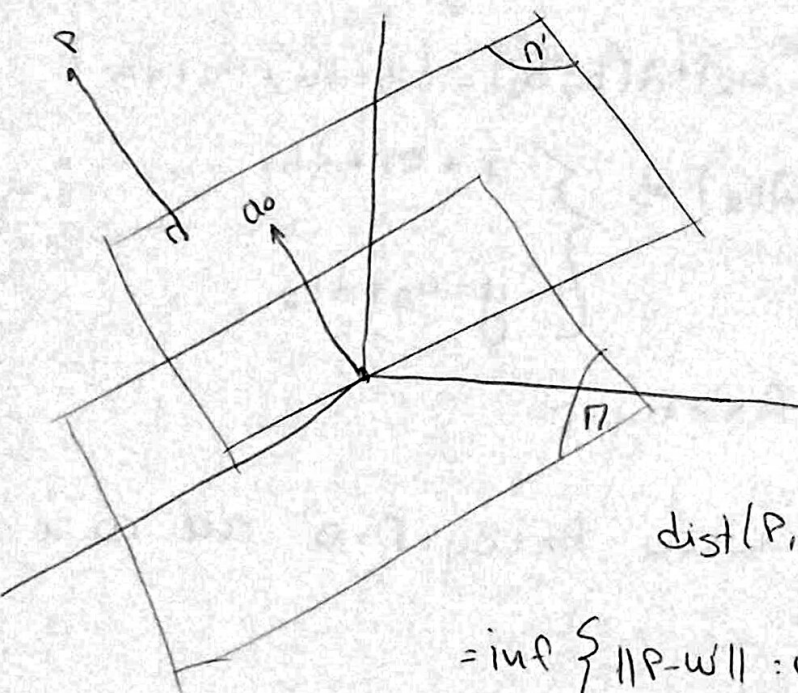
του $\mathbb{R}^2$ με $0 \in l$ και $a_0 \in l'$. Άρα αν $v \in l'$ τότε $v = a_0 + v_\perp, v_\perp \in l$

Για $v \in l'$ έχουμε $\|u_0 - v\| = \|u_0 - (a_0 + v_\perp)\| = \|(u_0 - a_0) - v_\perp\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf \{ \|u_0 - v\| : v \in l' \} = \inf \{ \|(u_0 - a_0) - v\|, v \in l \} = \text{dist}(u_0 - a_0, l)$$



Απόσταση σημείου από επίπεδο

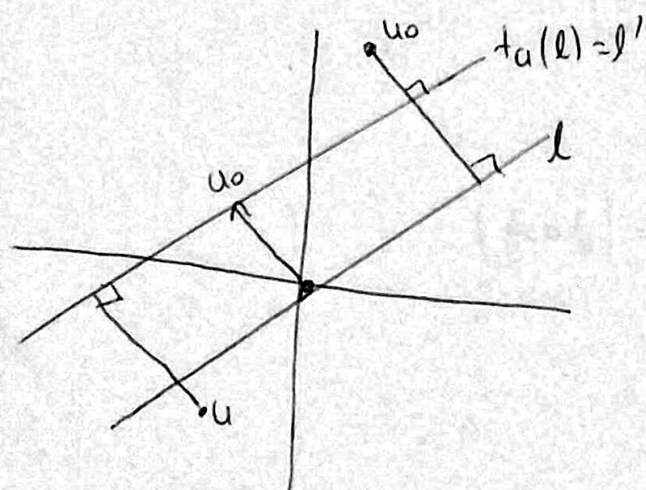


$$\Pi' = t_{a_0}(\Pi)$$

$$a_0 \in \Pi'$$

$$w' \in \Pi' \quad w' = a_0 + w, \quad w \in \Pi$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, \Pi') &= \inf \{ \|P - v\| : v \in \Pi' \} = \\ &= \inf \{ \|P - w'\| : w' \in \Pi' \} = \inf \{ \|P - (a_0 + w)\| : w \in \Pi \} = \\ &= \inf \{ \|P - a_0 - w\| : w \in \Pi \} = \text{dist}(P - a_0, \Pi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{dist}(u_0, l') &= \text{dist}(u_0, l) - \text{dist}(l, a_0) \\ \text{dist}(u, l') &= \text{dist}(u, l) + \text{dist}(l, a_0) \end{aligned}$$

Επίκλιση ευθείας στο επίπεδο

Έστω $L = t_{a_0}(l)$ να είναι μια ευθεία του επιπέδου

Έστω $u = (x, y) \in L$ τότε υπάρχουν $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ ώστε:

: $\forall u = (x, y) \in L$ να ισχύει $Ax + By + \Gamma = 0$

Έστω $a_0 = (a_1, a_2)$, $l = (b_0) = \{\lambda b_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ όπου $b_0 = (b_1, b_2) \neq 0$

Αρα από $u = (x, y) \in L$ έχουμε: $u = a_0 + v$ για $v \in l$

οπότε $\exists \lambda \in \mathbb{R} : u = a_0 + \lambda b_0 = (a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2) = (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2)$

Αρα $u = (x, y) = (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2) \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 + \lambda b_1 \\ y = a_2 + \lambda b_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \lambda \Rightarrow Ax + By + \Gamma$$

Αντίστροφα, έστω $u = (x, y)$ ώστε $Ax + By + \Gamma = 0$ τότε το u ανήκει σε ευθεία.

$$Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{B}(-Ax - \Gamma) \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \Rightarrow u = \left(x, -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}\right) = \left(x, -\frac{A}{B}x\right) + \left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right) = x\left(1, -\frac{A}{B}\right) + \left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$$

$$u_0 = \left(1, -\frac{A}{B}\right) \quad a_0 = \left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$$

$$u = xu_0 + a_0 \in t_{a_0}(l) \quad \text{όπου } l = \{u_0\}$$

Ομοια για τα επίπεδα

Έστω επίπεδο $\omega = \{a_0, b_0\}$ και $c_0 \notin \omega$, $\omega' = t_{c_0}(\omega)$

Τότε $\exists A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R} : \omega' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0\}$

και αντίστροφα αν για τα $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

Τότε $\exists \omega \in \mathbb{R}^3$ ώστε ω να ανήκει σε επίπεδο.